

CORRIGE

SIGMABC "pas à pas"

- 1) Choisir le nom d'une variable indicée et l'écrire

$$x_i$$

- 2) Ecrire la somme de cette variable entre 2 rangs numériques (éviter un dernier rang trop élevé) que vous aurez choisis

$$\sum_{i=1}^3 (x_i)$$

- 3) Développer cette somme algébriquement

$$\sum_{i=1}^3 x_i = x_1 + x_2 + x_3$$

- 4) Imaginer un tableau comportant dans des colonnes : les rangs, les modalités de votre variable (n'oubliez pas le total).

rang i	modalités x_i
1	x_1
2	x_2
3	x_3
Total	

- 5) Créer une colonne supplémentaire en conférant aux modalités des valeurs (au choix)

rang i	modalités x_i	x_i
1	x_1	20
2	x_2	15
3	x_3	5
Total		40

- 6) Quel est alors le résultat de votre somme de la question 2. Ecrivez le.

$$\sum_{i=1}^3 x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 20 + 15 + 5 = 40$$

- 7) Faites le même travail (questions 1 à 6) pour une autre variable de votre choix, mais dans les mêmes rangs

$$\sum_{i=1}^3 y_i = y_1 + y_2 + y_3 = 6 + 3 + 7 = 16 \text{ (voir tableau)}$$

rang i	modalités X _i	X _i	Y _i
1	X ₁	20	6
2	X ₂	15	3
3	X ₃	5	7
Total		40	16

8) Ecrire la somme de l'addition de vos deux variables algébriquement.

$$\sum_{i=1}^3 (x_i + y_i)$$

9) Développez et simplifiez cette somme suivant vos rangs.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 (x_i + y_i) \\ &= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = \\ & \sum_{i=1}^3 x_i + \sum_{i=1}^3 y_i \end{aligned}$$

10) Créer une colonne supplémentaire dans votre tableau pour cette addition.

rang i	modalités X _i	X _i	Y _i	(x _i +y _i)
1	X ₁	20	6	26
2	X ₂	15	3	18
3	X ₃	5	7	12
Total		40	16	56

11) Quel est alors le résultat de votre somme de la question 8. Ecrivez le.

$$\sum_{i=1}^3 (x_i + y_i) = 56$$

12) Choisissez une lettre pour définir une constante et donnez-lui une valeur.

$$k = 8$$

13) Dans une colonne du tableau reporter votre constante (pour chaque modalité).

rang i	modalités X _i	X _i	Y _i	(x _i +y _i)	k
1	X ₁	20	6	26	8
2	X ₂	15	3	18	8
3	X ₃	5	7	12	8
Total		40	16	56	24

14) Ecrire **la somme** de l'addition de l'une de vos variables avec la constante algébriquement.

$$\sum_{i=1}^3 (x_i + k)$$

15) Développer cette somme et la simplifier.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 (x_i + k) &= (x_1 + k) + (x_2 + k) + (x_3 + k) = (x_1 + x_2 + x_3) + (k + k + k) \\ &= \sum_{i=1}^3 (x_i) + 3k \end{aligned}$$

On peut aussi appliquer directement sans développement la règle : BORNER LA CONSTANTE :

$$\sum_{i=1}^3 (x_i + k) = \sum_{i=1}^3 (x_i) + \sum_{i=1}^3 (k) = \sum_{i=1}^3 (x_i) + (3 - 1 + 1)k = \sum_{i=1}^3 (x_i) + 3k$$

16) Réaliser le calcul de son total dans le tableau (en créant une colonne supplémentaire).

rang i	modalités X _i	X _i	Y _i	(x _i +y _i)	k	(x _i +k)
1	X ₁	20	6	26	8	28
2	X ₂	15	3	18	8	23
3	X ₃	5	7	12	8	13
Total		40	16	56	24	64

17) Quel est alors le résultat de votre somme de la question 14. Ecrivez le.

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 (x_i + k) \\ &= (20+8) + (15+8) + (5+8) \\ &= 28 + 23 + 13 = 64 \text{ OU } = 40 + (3 \times 8) = 40 + 24 = 64 \end{aligned}$$

18) Choisissez l'une des modalités de l'une ou l'autre de vos variable. Ecrire son nom.

Soit y_2

19) Dans une colonne du tableau reporter cette modalité et ses valeurs.

rang i	modalités X _i	X _i	Y _i	(x _i +y _i)	k	(x _i +k)	kx _i	Y ₂
1	X ₁	20	6	26	8	28	160	3
2	X ₂	15	3	18	8	23	120	3
3	X ₃	5	7	12	8	13	40	3
Total		40	16	56	24	64	320	

20) Ecrivez algébriquement la somme du **produit** de l'une de vos variable par cette modalité, conformément à vos rangs.

$$\sum_{i=1}^3 y_2 \cdot x_i$$

21) Réaliser le calcul de son total dans le tableau (en créant une colonne supplémentaire).

rang i	modalités x_i	x_i	y_i	(x_i+y_i)	k	(x_i+k)	kx_i	y_2	$x_i \cdot y_2$
1	x_1	20	6	26	8	28	160	3	60
2	x_2	15	3	18	8	23	120	3	45
3	x_3	5	7	12	8	13	40	3	15
Total		40	16	56	24	64	320		120

22) Quel est alors le résultat de votre somme de la question 20. Ecrivez le.

$$\sum_{i=1}^3 y_2 \cdot x_i$$

$$= (3 \times 20) + (3 \times 15) + (3 \times 5) = 3(20 + 15 + 5) = 3 \times 40 = 120$$

$$y_2 \sum_{i=1}^3 x_i$$

Pour aller plus loin

A- La Commutativité

1) Ecrivez l'intitulé (ou libellé) de la colonne ou vous avez appliqué la *commutativité*.

La propriété de commutativité a été appliquée dans la réponse aux questions 9 et 15.

à la question 9 : $(x_i + y_i)$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 (x_i + y_i) \\ &= \sum_{i=1}^3 x_i + \sum_{i=1}^3 y_i \end{aligned}$$

à la question 15 : $(x_i + k)$

$$\sum_{i=1}^3 (x_i + k) = \sum_{i=1}^3 (x_i) + \sum_{i=1}^3 (k)$$

2) Ecrivez algébriquement cette propriété appliquée à vos variables.

$$\sum_{i=1}^3 (x_i + y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^3 x_i + \sum_{i=1}^3 y_i$$

3) Montrer qu'elle est vérifiée numériquement par votre tableau.

$$(20+6) + (15+3) + (5+7) = (20 + 15 + 5) + (6 + 3 + 7) = 40 + 16 = 56$$

B- La double somme

1) La double somme : Ecrire à l'aide de vos variables algébriquement la règle selon laquelle, **La somme du produit de deux variables indicées** n'est pas égale au produit des sommes des deux variables.

règle générale produit différent de

$$\sum_{i=1}^n (x_i \otimes y_i) \neq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

Appliquée à notre exemple

$$\sum_{i=1}^3 (x_i \otimes y_i) \neq \sum_{i=1}^3 x_i \otimes \sum_{i=1}^3 y_i$$

2) Vérifier numériquement cette règle, en créant dans le tableau la colonne donnant **La somme du produit de (vos) deux variables indicées**, pour la comparer au produit des sommes des deux variables. Ecrivez ce que vous constatez numériquement.

rang i	modalités X _i	X _i	Y _i	(xi+yi)	k	(xi+k)	kx _i	Y ₂	X _i ·Y ₂	(xi.yi)
1	X ₁	20	6	26	8	28	160	3	60	120
2	X ₂	15	3	18	8	23	120	3	45	45
3	X ₃	5	7	12	8	13	40	3	15	35
Total		40	16	56	24	64	320		120	200

On constate bien que $200 \neq (40 \times 16) = 640$

- 3) Quelle est alors la véritable expression algébrique du **produit des sommes des deux variables indicées**.

La véritable expression est celle de la double somme :

La double somme : 4 expressions équivalentes

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^p y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (x_i \times y_j)$$

équivale^{nt} à

$$\left(\sum_{j=1}^p y_j \right) \times \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n (y_j \times x_i)$$

- 4) Le tableau que vous avez construit plus haut comme exemple est-il approprié à la recherche du résultat de **la somme du produit de deux variables indicées**. Justifier.

Le tableau est inapproprié, car **la somme du produit de deux variables indicées** suppose des produits croisés. Le tableau approprié est donc celui des **produits croisés**, encore appelé produit de **variables non correspondantes**.

- 5) Votre exemple peut-il être construit conformément à cette fin ? Si oui, réalisez le.

x_i	y_j	6	3	7	somme lignes
20		120	60	140	320
15		90	45	105	240
5		30	15	35	80
somme colonnes		240	120	280	640

- 6) Ecrire littéralement la règle de la double somme établie algébriquement à la question 3 ci-dessus. Vérifier cette règle à l'aide de votre tableau (question 5).

La règle s'énonce : **La somme du produit de deux variables indicées non correspondantes est égale au produit des sommes des modalités lignes et colonnes.**

Vérification :

Le total général du tableau ci-dessus (ou double somme) = 640

Est égal à : $(20 + 15 + 5) \times (6 + 3 + 7) = 40 \times 16 = 640$.

Fin du corrigé

